María Durán

1. Gas ideal de fermiones. Niveles ε_i de energía, número ocupación n_i y degeneración g_i.

i) número de configuraciones asociadas a g_i con n_i partículas

$$\boxed{\Pi_i = \binom{g_i}{n_i} = \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!}}$$

volumen fásico

g_i cajas
n_i fermiones

* En cada caja 1 fermión o ninguno

ii) nº total de configuraciones: $\Pi = \prod_i \Pi_i$ y su entropía $S\{n_i\}$

$$\boxed{\Pi = \prod_i \Pi_i = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!}}$$

⇒ volumen fásico total

$$S = k_B \ln \Pi = k_B \ln \prod_i \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!}$$

$$\boxed{S = k_B \ln \left[\prod_i \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i-n_i)!}\right]}$$

iii) Ppio de entropía máxima de Jaynes, calcular la distribución más probable de nº de ocupación del stma aislado con N fermiones y energía E.

Ppio de entropía máxima Jaynes || $S\{P_\ell\} = -k_B \sum_\ell P_\ell \ln P_\ell$

$$L = S - \alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i \varepsilon_i = \sum_i [\underbrace{k_B \ln g_i! - k_B \ln n_i! - k_B \ln (g_i-n_i)!}_{S} -$$

$$- \alpha n_i - \beta n_i \varepsilon_i] \simeq$$

$$\simeq \sum_i \left[K_B \ln g_i - K_B \lg_i - K_B n_i \ln n_i + K_B n_i - K_B (g_i - n_i) \ln (g_i - n_i) + \right.$$
$$\left. + K_B (g_i - n_i) - \alpha n_i - \beta n_i \varepsilon_i \right] \Rightarrow \delta L = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial n_i} = 0 \quad \forall n_i$$

$$-K_B \ln n_K - K_B + K_B + K_B \ln (g_i - n_i) + K_B - K_B - \alpha - \beta \varepsilon_K = 0$$

$$K_B \ln \left(\frac{g_K - n_K}{n_K} \right) = \alpha + \beta \varepsilon_K \qquad \boxed{n_K = \frac{g_K}{e^{\frac{\alpha + \beta \varepsilon_K}{K_B}} + 1}}$$

iv) ¿cómo cambiarían los resultados anteriores si fuesen bosones?

→ Al ser bosones ⇒ cada caja ⊕ de 1 partícula.

$$\boxed{\Pi_i = \binom{n_i + g_i - 1}{g_i - 1} = \binom{n_i + g_i - 1}{n_i}}$$

→ no sé muy bien porqué era así

v) ¿Y si fuesen partículas clásicas idénticas pero no indistinguibles?

$$\Pi_i = g_i^{n_i}$$

$$\boxed{\Pi = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \prod_i g_i^{n_i}}$$

$$\Pi = \prod_i \Pi_i$$

2. N espines de ^{13}C $(I = 1/2)$

Localizados e independientes en eq térmico a T

↳ Acción campo magnético $\quad H_i = -g_N \mu_N I B \frac{1}{\hbar}$

a) ¿Espectro de energía? 2 configuraciones ⊕ favor ε_+ ⊖ contra ε_-

Función partición de 1 spin y el stma de spines

$I = 1/2 \qquad H = -g_N \mu_N \frac{BI}{\hbar}$

$I = m \qquad I_z \in (-m\hbar, m\hbar) \qquad I_z = \frac{-\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}$

$$\boxed{E_\pm = \mp \frac{1}{2} g_n \mu_n B}$$

$\boxed{Z_N = Z_1^N}$ → Partículas indistinguibles e independientes

$$Z_1 = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-} = 2\cosh\left(\frac{1}{2} B \mu_N g_N\right)$$

$$Z_N = 2^N \cosh^N\left(\frac{1}{2} B \mu_N g_N\right)$$

b) Obtener la fracción de núcleos N_-/N_+

¿Expresión si $\mu_N g_N B \ll k_B T$

$$\langle N_+ \rangle = N P_+ = N \frac{e^{-\beta E_+}}{Z_1}$$

$$\langle N_- \rangle = N P_- = N \frac{e^{-\beta E_-}}{Z_1}$$

$$\boxed{\frac{\langle N_- \rangle}{\langle N_+ \rangle} = e^{-\beta g_N \mu_N B}}$$

Taylor

$$\boxed{\frac{\langle N_- \rangle}{\langle N_+ \rangle} \sim 1 - \beta g_N \mu_N B}$$

$$P = \frac{e^{-\beta E}}{Z_1}$$

c)

ec. Maestra

$$\boxed{\frac{dP_e}{dt} = \sum_{m \neq e} \left[P_m W_{me} - P_e W_{em} \right]}$$

$n(t) = N_+ - N_-$

$W_{-+} = W_{+-} \equiv W$

$$\frac{dn}{dt} = N \left(\frac{dP_+}{dt} - \frac{dP_-}{dt} \right)$$

$$\frac{dP_+}{dt} = W_{-+} P_- - W_{+-} P_+ = w\,(P_- - P_+)$$

$$\frac{dP_-}{dt} = W_{+-} P_+ - W_{-+} P_- = w\,(P_+ - P_-)$$

$$\frac{dn}{dt} = -2N\,(P_+ - P_-)\,w = -2w \cdot n$$

$$n = n_0 e^{-2wt} \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$$

$$\frac{dE}{dt} = N_+ W_{+-} (E_+ - E_-) - N_- W_{-+} (E_- - E_+) = w\,(E_+ - E_-)(N_+ - N_-)$$

$$\frac{dE}{dt} = w\,\Delta E\, n \to 0$$

d)

$W_{-+} + W_{+-} = 1/\tau_1$

$$\frac{dn}{dt} = N \left(\frac{dP_+}{dt} - \frac{dP_-}{dt} \right) = N\,(W_{-+} P_- - \cancel{P} \cdot W_{+-} P_- - W_{+-} P_+ + W_{-+} P_-) =$$

$$= 2N\,(W_{-+} P_- - W_{+-} P_+) = 2\,(W_{-+} N_- - W_{+-} N_+) =$$

Teniendo en cuenta:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{n_0 - n}{\tau_1} \qquad n = N_+ - N_- \qquad N_+ = \frac{N+n}{2}$$

$$N = N_+ + N_- \qquad N_- = \frac{N-n}{2}$$

Así $$\frac{dn}{dt} = 2\left(W_{-+}\frac{N-n}{2} - W_{+-}\frac{N+n}{2}\right) = N(W_{-+} - W_{+-}) - n(W_{-+} + W_{+-}) =$$

$$= N(W_{-+} - W_{+-}) - \frac{n}{\tau_1} = \frac{N\frac{W_{-+} - W_{+-}}{W_{-+} + W_{+-}} - n}{\tau_1}$$

$$\frac{dn}{dt} = -2wn + \frac{n_0 - n}{\tau_1} = 0 \qquad \boxed{n = \frac{n_0}{1 + 2w\tau_1}}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{SR} = N_+ W_{+-}(E_+ - E_-) + N_- W_{-+}(E_- + E_+) = (E_- - E_+)(N_- W_{-+} -$$

$$N_+ W_{+-}) = (E_- - E_+)\left(\frac{N-n}{2} W_{-+} - \frac{N+n}{2} W_{+-}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(E_- - E_+)\left[N(W_{-+} - W_{+-}) - n(W_{-+} + W_{+-})\right]$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{SR} = \frac{1}{2}(E_- - E_+)\frac{n_0 - n}{2} \qquad n = \frac{n_0}{1 + 2w\tau_1}$$

$$\frac{dE}{dt} = w\Delta E n = w\Delta E \frac{n_0}{1 + 2w\tau_1}$$